Επίδραση των μετασχηματισμών δυναμικού διαγράμματος στο συλλογισμό των μαθητών

Σταυρούλα Πατσιομίτου, Αναστάσιος Εμβαλωτής
spatsiom@cc.uoi.gr, aemvalot@uoi.gr
ΠΤΔΕ, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται η επίδραση των εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας και συγκεκριμένα της απόκρυψης /εμφάνισης, ίχνους ευθυγράμμου τμήματος και περιστροφής ως προς επιλεγμένη γωνία στην επίδραση του τρόπου συλλογισμού των μαθητών μιας ομάδας 2 ατόμων. Οι μαθητές αλληλεπιδρούν με τα εργαλεία και οδηγούνται στην επίλυση του προβλήματος αναπτύσσοντας επαγωγικό, μετασχηματιστικό και παραγωγικό συλλογισμό.

Λέξεις κλειδιά: λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, εργαλεία, είδη συλλογισμού, επίπεδα van Hiele

Εισαγωγή

Ένα πλήθος ερευνών σ' όλον τον κόσμο αναφέρονται στον τρόπο συλλογισμού των μαθητών κατά τη διάρκεια επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων γενικότερα και ειδικότερα γεωμετρικών προβλημάτων. Η έρευνα έχει δείξει ότι οι μαθητές συναντούν δυσκολία στην κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών (π.χ. van Hiele, 1986; Hoffer, 1981), με αποτέλεσμα να ολοκληρώνουν τις υποχρεώσεις τους στην τάξη αλλά να μην κατανοούν τις έννοιες, ορισμούς ή αποδείξεις θεωρημάτων που περιέχονται στο σχολικό εγχειρίδιο ή διατυπώνονται από τον δάσκαλο και επομένως να μην είναι σε θέση να ανταποκριθούν στην κατασκευή της απόδειξης (Senk, 1989). Το αποτέλεσμα αυτό είναι συνέπεια πολλών παραγόντων, με σημαντικότερους το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης των μαθητών και τα μέσα που διαμεσολαβούν στη διδασκαλία και τη μάθηση των γεωμετρικών εννοιών.

Το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης των μαθητών γίνεται αντιληπτό κατά την διάρκεια των συζητήσεων μέσα στην τάξη (ή σε μια ομάδα στην οποία συμμετάσχει ο μαθητής), σε περιστάσεις που έχουν στόχο την επίλυση προβλημάτων. Οι μαθητές κατά την διάρκεια της επίλυσης προβλήματος χρησιμοποιούν ορισμούς των γεωμετρικών αντικειμένων, αναπτύσσουν εικασίες και επιχειρήματα για να στηρίξουν τον τρόπο συλλογισμού τους. Ο τρόπος που κάθε μαθητής διατυπώνει τις σκέψεις του, μεταφράζει ένα πρόβλημα ως σχέδιο στο χαρτί ή στον πίνακα, ή στην οθόνη ενός υπολογιστή, είναι διαφορετικός και εξατομικευμένος. Πολλές έρευνες έχουν διεξαχθεί για την διερεύνηση του τρόπου συλλογισμού των μαθητών (π.χ. Hoffer, 1981; Usiskin, 1982; van Hiele, 1986; Burger & Shaughnessy, 1986; Crowley, 1987; Fuys, Geddes & Tischler, 1988; Gutierrez, Jaime & Fortuny, 1991; Mason, 1997). Η θεωρία των van Hiele υποστηρίζει ότι οι μαθητές έχουν πέντε διαφορετικά επίπεδα σκέψης και επομένως έχουν διαφορετικό τρόπο με τον οποίο μεταφράζουν τη διατύπωση ενός προβλήματος σε σχέδιο, αιτιολογούν και διατυπώνουν τα συμπεράσματα τους. Οι Fuys, Geddes & Tischler (1988) υποστηρίζουν ότι οι μαθητές με τη βοήθεια δυναμικών χειρισμών κινούνται από το πρώτο προς το δεύτερο van Hiele επίπεδο. Ο διαμεσολαβητικός ρόλος των δραστηριοτήτων και εργαλείων ή τεχνουργημάτων υλικών

Α. Τζιμογιάννης (επιμ.), Πρακτικά Εργασιών 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου
με Διεθνή Συμμετοχή «Οι ΤΠΕ στην Εκπαίδευση», τόμος II, σ. 445-452
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου, Κόρινθος, 23-26 Σεπτεμβρίου 2010

(για παράδειγμα ένας υπολογιστής) και νοητικών (για παράδειγμα ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας ή ένα σχολικό εγχειρίδιο) στην εισαγωγή των γεωμετρικών εννοιών είναι θεμελιώδης. Η θεωρία εργαλειακής γένεσης του Rabardel (1995) είναι ένα κατάλληλο θεωρητικό πλαίσιο για την ερμηνεία των φαινομένων που συμβαίνουν κατά την διάρκεια της αλληλεπίδρασης των χρηστών/μαθητών με τα τεχνολογικά εργαλεία.

Στη παρούσα μελέτη θα διερευνήσουμε τα είδη συλλογισμού που αναπτύσσουν οι μαθητές σε σχέση με τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης τους, καθώς και τον αντίκτυπο της ανάπτυξης σχημάτων εργαλειοποιημένης δράσης κατά τη χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας όπως του Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1991). Στη συνέχεια της παρούσας εργασίας θα αναφερθούμε α) στην θεωρία των van Hiele, β) σε μια συνοπτική επισκόπηση στα είδη συλλογισμού και γ) στο ρόλο που παίζουν τα τεχνολογικά εργαλεία στην κατασκευή των σχημάτων χρήσης και εργαλειοποιημένης δράσης, καθώς και τον αντίκτυπο αυτών των σχημάτων στη κατασκευή των εννοιών από τους μαθητές.

Είδη συλλογισμού των μαθητών

Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος, οι μαθητές αναπτύσσουν διαφορετικά είδη συλλογισμού συμπεριλαμβανομένου του επαγωγικού (inductive), παραγωγικού (deductive), απαγωγικού (abductive), και μετασχηματιστικού (transformational) συλλογισμού (Harel & Sowder, 1998; Peirce, 1992; Simon, 1996). Ο Peirce (1992, p.189) ταξινομεί όλα τα είδη συλλογισμού ως εξής: παραγωγικός ή αναλυτικός, επαγωγικός και απαγωγικός.

- Ο *παραγωγικός συλλογισμός* αρχίζει από έναν γενικό κανόνα και προχωρά σε ένα ιδιαίτερο συμπέρασμα ή με άλλα λόγια αναφέρεται στα συμπεράσματα που προέρχονται από μια λογική αλυσίδα συλλογισμών στην οποία κάθε επόμενο βήμα προκύπτει από κάποιο προηγούμενο (Ennis, 1969, p.7 στο Simon, 1996, p.197).
- Ο *επαγωγικός συλλογισμός* αρχίζει από μια ειδική περίπτωση και ολοκληρώνει με έναν γενικό κανόνα.
- Ο *απαγωγικός συλλογισμός* για τον Peirce (1960), προκύπτει όταν κάποιος συμπεραίνει από τα αποτελέσματα την αιτία. Δηλαδή «παρατηρεί τα γεγονότα και αναζητά μια θεωρία για να τα εξηγήσει …ο γενικός τύπος της απαγωγής είναι: το γεγονός Α παρατηρείται, αν το C ήταν αληθές τότε το Α θα μπορούσε να ήταν αληθές, έτσι είναι λογικό να υποθέσουμε ότι το C είναι αληθές» (Peirce, 1960, p. 372)

Ο Simon (1996) υποστηρίζει ότι ο χαρακτηρισμός των μαθηματικών αιτιολογήσεων των μαθητών ως επαγωγικές ή παραγωγικές είναι ελλιπής, αναδεικνύοντας τις καταστάσεις προβλήματος στις οποίες οι μαθητές αναπτύσσουν ένα άλλο είδος συλλογισμού, τον οποίο καλεί *μετασχηματιστικό συλλογισμό* στον οποίο οι νοητικές διαδικασίες: «επιτρέπουν σε κάποιον να προβλέψει τους μετασχηματισμούς που αυτά τα αντικείμενα υποβάλλονται και το σύνολο των αποτελεσμάτων αυτών των διαδικασιών» (Simon, 1996, p.201).

Η θεωρία των van Hiele

Το μοντέλο των van Hiele στη γεωμετρία μας παρέχει μια συνοπτική περιγραφή ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών (Fuys et al., 1988). Οι Fuys et al. (ibid.) διευκρίνισαν ότι το να είναι ο μαθητής «σε ένα επίπεδο» δηλώνει ότι οφείλει (ο μαθητής) με συνέπεια να παρουσιάζει τη συμπεριφορά αυτού του επιπέδου. Η συνηθισμένη ερμηνεία και τα γενικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα των πρώτων τεσσάρων επιπέδων, που συναντώνται στους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, μπορούν να περιγραφούν ως εξής (de Villiers, 2004; Gawlick, 2005):

- Επίπεδο 1 (αναγνώριση ή απεικόνιση): αναγνωρίζουν οπτικά τα σχήματα από τη ολική εμφάνισή τους. Οι ιδιότητες ενός σχήματος δεν γίνονται αντιληπτές.
- Επίπεδο 2 (ανάλυση): αρχίζουν να αναγνωρίζουν τις ιδιότητες των σχημάτων και μαθαίνουν την κατάλληλη ορολογία για την περιγραφή τους. Μπορούν να αναγνωρίσουν και να ονομάσουν τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων, αλλά δεν κατανοούν τις σχέσεις μεταξύ αυτών των ιδιοτήτων.
- Επίπεδο 3 (διάταξη): διατάσσουν λογικά τις ιδιότητες των σχημάτων και καταλαβαίνουν τις αλληλεξαρτήσεις μεταξύ των σχημάτων. Το επίπεδο 3 (αφαίρεση) προσδιορίζεται ως επίπεδο που συνδέεται με την χρήση και κατασκευή «εάν… τότε» δηλώσεων, και συνεπώς με την απόδειξη (Gawlick 2005).
- Επίπεδο 4 (αφαίρεση/παραγωγικός συλλογισμός): αρχίζουν να καταλαβαίνουν τη σημασία της αφαιρετικής διαδικασίας, τον ρόλο των αξιωμάτων, των θεωρημάτων και της απόδειξης.

Ο Hoffer (1981) υποστηρίζει ότι πρέπει να αναπτυχθούν πέντε βασικές ικανότητες στην γεωμετρία: οπτικές, λεκτικές, σχεδίασης, λογικές, εφαρμογής: α) οι *οπτικές* ικανότητες των μαθητών μπορεί να αναπτυχθούν και να βελτιωθούν με δραστηριότητες που συνδυάζουν αναγνώριση σχημάτων σε διαφορετικές μορφές αναπαράστασης, β) οι *λεκτικές,* όταν ο μαθητές αποκτήσουν την ικανότητα να διατυπώσουν με ακριβή και τυπικό τρόπο τις γεωμετρικές ιδιότητες ενός σχήματος γ) οι *σχεδιαστικές,* όταν οι μαθητές έχουν την ικανότητα να μεταφράσουν την προφορική πληροφορία σε σχέδιο, δ) οι *λογικές,* όταν οι μαθητές έχουν την ικανότητα να χρησιμοποιήσουν κατάλληλα θεωρήματα για να αποδείξουν μια πρόταση, να κατηγοριοποιήσουν ή να ομαδοποιήσουν σχήματα αντιλαμβανόμενοι τις σχέσεις εγκλεισμού των σχημάτων και ε) οι ικανότητες *εφαρμογής,* όταν έχουν είναι σε θέση να εφαρμόσουν τις μαθηματικές έννοιες επιλύοντας κάποιο μαθηματικό μοντέλο ή αναπαριστώντας αφηρημένες καταστάσεις.

Έρευνες έχουν δείξει ότι οι δάσκαλοι που έχουν εφαρμόσει λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας στην τάξη έχουν επισημάνει σημαντική διαφορά στην εξερεύνηση των γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές. Σε μια συνοπτική επισκόπηση, πολλοί ερευνητές έχουν πραγματοποιήσει μελέτες χρησιμοποιώντας την θεωρία των van Hiele για την ανάλυση των δεδομένων τους και έχουν καταλήξει στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές που χρησιμοποίησαν το Sketchpad παρουσίασαν:

- θετικότερες αντιδράσεις κατά τη δοκιμή των υποθέσεων και των κατασκευών [μεταξύ άλλων, Growman (1996)]
- σημαντικά υψηλότερα αποτελέσματα σε τεστ που περιείχαν έννοιες μετασχηματισμού [μεταξύ άλλων, Dixon (1996), η οποία καταλήγει στο συμπέρασμα ότι οι σπουδαστές που διδάχτηκαν τις έννοιες της ανάκλασης και της περιστροφής στο περιβάλλον του Sketchpad ξεπέρασαν σημαντικά τους συνομήλικους τους που είχαν διδαχθεί παραδοσιακά τις έννοιες]
- σημαντικά υψηλότερα αποτελέσματα στα μετά -tests [μεταξύ άλλων, Yousef (1997) και Almeqdadi (2000)].

Η θεωρία εργαλειοποίησης του Rabardel

Ο Rabardel μέσω της θεωρίας *εργαλειακής γένεσης* παρέχει ένα πλαίσιο για την κατανόηση της σχέσης μεταξύ του εργαλείου και του χρήστη. Το υποκείμενο κατά τη διάρκεια της εργαλειακής γένεσης κατασκευάζει ένα όργανο (instrument), το οποίο διαφοροποιείται από το αντικείμενο, υλικό ή συμβολικό, στο οποίο είναι βασισμένο και για το οποίο χρησιμοποιείται ο όρος "artefact". Σύμφωνα με τον Rabardel (1995) το υποκείμενο κατασκευάζει κατά την διάρκεια της εργαλειακής γένεσης *χρηστικά σχήματα* (utilization schemes ή using schemes) του εργαλείου, δηλαδή νοητικά σχήματα που οργανώνουν την δραστηριότητα μέσω του εργαλείου, προκειμένου να πραγματοποιηθεί ένας δεδομένος στόχος. Ο Rabardel διακρίνει δυο τύπους των *χρηστικών σχημάτων* : τα *σχήματα χρήσης* (usage schemes) τα προσανατολισμένα στη διαχείριση του εργαλείου και τα *σχήματα εργαλειοποιημένης δράσης* (instrumented action schemes) προσανατολισμένα στην εκτέλεση ενός συγκεκριμένου στόχου. Οι Guin & Trouche (1999) χαρακτηρίζουν ως αμφίδρομη τη διαδικασία εργαλειακής γένεσης και τη διακρίνουν σε (α) *εργαλειοποίηση (instrumentation)* κατά την οποία το εργαλείο έχει επιπτώσεις στην σκέψη του χρήστη και στον τρόπο που αυτή διαμορφώνεται (λόγω της χρήσης του εργαλείου) και (β) *εργαλειοποίησης* του artefact/tool *(instrumentalization)*,, όπου το εργαλείο διαμορφώνεται από το χρήστη, ο οποίος τελικά το προσαρμόζει μετασχηματίζοντας το σε συγκεκριμένες χρήσεις.

Μεθοδολογία της έρευνας

Το ερευνητικό εγχείρημα που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία διεξήχθη σε μια τάξη δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Αθήνα. Το πείραμα πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια του δευτέρου εξαμήνου και περιέλαβε μαθητές ηλικίας 15-16 ετών. Αρχικά εξετάσαμε το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης των μαθητών χρησιμοποιώντας το τεστ που αναπτύχθηκε από τον Usiskin (1982) στο Πανεπιστήμιο του Σικάγου. Για την ερευνητική διαδικασία 14 μαθητές είχαν επιλεχθεί για να αποτελέσουν την «πειραματική ομάδα». Η ομάδα περιείχε ίσο αριθμό αγοριών και κοριτσιών στα επίπεδα 1 έως 3. Οι μαθητές ήταν φίλοι, πράγμα που ενθάρρυνε τη συζήτηση της ομάδας. Τα ζευγάρια (ή τριάδες) στην πειραματική ομάδα διαμορφώθηκαν ως εξής: 1) εξωστρεφείς και εσωστρεφείς μαθητές μαζί ώστε να ενθαρρυνθεί η συζήτηση 2) συμμετοχή στην ίδια ομάδα ατόμων που νοιώθουν φιλικά μεταξύ τους 3) περίπου το ίδιο επίπεδο ως προς το test van Hiele, ώστε να αποφευχθεί κάποιος να δίνει τις λύσεις πιο γρήγορα (ώστε να έχουν έτσι την δυνατότητα συμμετοχής όλοι). Η πειραματική ομάδα είχε συμμετάσχει σε 3 προηγούμενες διαδοχικές φάσεις με το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας πριν διερευνήσουν το συγκεκριμένο πρόβλημα. Οι φάσεις περιληπτικά είναι (Patsiomitou & Emvalotis, 2010) : 1) κατασκευές τετραπλεύρων με έμφαση στο μενού Κατασκευή 2) κατασκευές τετραπλεύρων με έμφαση στο μενού Μετασχηματισμός 3) διερεύνηση ανοικτών προβλημάτων και 4) κατασκευή και μετασχηματισμός ημι-προσχεδιασμένων Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων (LVAR). Οι συναντήσεις με την πειραματική ομάδα βιντεοσκοπήθηκαν και στη συνέχεια αναλύθηκε η διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων. Στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της ερευνητικής διαδικασίας ως προς τον τρόπο που σε μια *μελέτη περίπτωσης* (Stake, 1995; Bogdan & Biklen, 1998) οι μαθητές διατυπώνουν τις σκέψεις τους για να λύσουν ένα πρόβλημα. Η έρευνα επικεντρώνεται στην αλληλεπίδραση των μαθητών με τα εργαλεία του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad και τον αντίκτυπο της αλληλεπίδρασης στις διατυπώσεις και τα επίπεδα σκέψης των μαθητών. Η έρευνα στόχευε στη γνωστική ανάλυση του προβλήματος που αφορά την ανάπτυξη παραγωγικού συλλογισμού. Εστίασε στην ανάλυση α) των αλληλεπιδράσεων που λαμβάνουν χώρα μεταξύ των μαθητών προκειμένου να εξεταστούν και να κατασκευαστούν(με τη χρήση εντολών και εργαλείων του λογισμικού) χρηστικά σχήματα β) των μετασχηματισμών που υφίστανται οι λεκτικές διατυπώσεις σε διάφορα επίπεδα και σε διαφορετικές φάσεις της έρευνας των μαθητών ως προς την ανάπτυξη συλλογισμών και αιτιολόγησης.

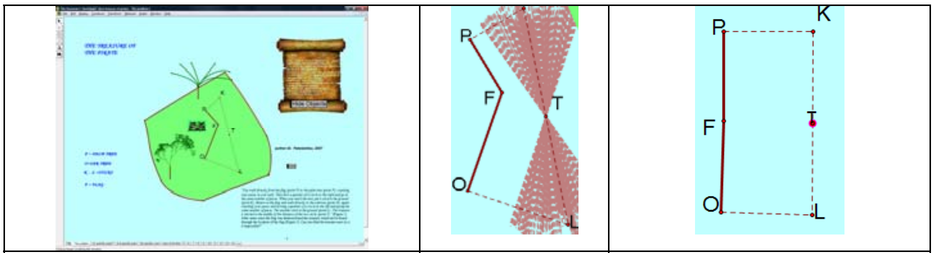
Οι κύριες ερευνητικές ερωτήσεις διατυπώθηκαν ως εξής:

1) Επιδρούν οι αλληλεπιδραστικές τεχνικές του λογισμικού στον τρόπο συλλογισμού των μαθητών;

2) Διαφοροποιείται (με βάση τις απαντήσεις των μαθητών) το επίπεδο van Hiele στην πειραματική ομάδα από την ομάδα ελέγχου;

Ερευνητικά εργαλεία

Το πρόβλημα που διερευνήθηκε από τους μαθητές ήταν η αναθεωρημένη έκδοση του «*χαμένου θησαυρού των πειρατών*», πρόβλημα διατυπωμένο από το Ρώσο, George Gamow (1948, 1988). Αρκετοί ερευνητές έχουν εμπνευστεί από το πρόβλημα (ενδεικτικά Villier (1999) και Scher (2003)), χρησιμοποιώντας το Geometer's Sketchpad. Η ερευνήτρια φρόντισε να ενισχύσει με ιστορικά στοιχεία το πρόβλημα για να προκαλέσει το διαθεματικό ενδιαφέρον των μαθητών (Patsiomitou, 2008): *Στην Οδύσσεια (γ74-77) αναφέρεται ότι πειρατές εμφανίστηκαν και στα Ελληνικά νησιά. Ο πειρατής της ιστορίας μας έθαψε τον θησαυρό του στο νησί της Θάσου, και αποτύπωσε το σχέδιο του σε ένα χάρτη. Αφού τοποθέτησε σημαία σε ένα σημείο F προχώρησε ως τον φοίνικα P, έστριψε δεξιά κατά γωνία 90° και προχώρησε ίση απόσταση. Εκεί τοποθέτησε ένα πάσαλο K .Όμοια έκανε και ως το άλλο δέντρο O. Στην συνέχεια συνέδεσε τους δυο πασσάλους και στο μέσο της απόστασης KL έθαψε τον θησαυρό. Με την πάροδο του χρόνου η σημαία καταστράφηκε (πατήστε το κουμπί Απόκρυψη αντικειμένων). Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει τον θησαυρό;*



α β γ

Σχήμα 1. α) μοντελοποίηση του προβλήματος, β) ίχνος ευθ. τμήματος γ) ειδική λύση του προβλήματος)

Διερευνητική διαδικασία -ανάλυση

Οι μαθητές είχαν την δυνατότητα να κρύψουν και εμφανίσουν το σημείο F (τη σημαία). Η απόκρυψη του σημείου F είχε ως αποτέλεσμα τη απόκρυψη των ευθύγραμμων τμημάτων που οδηγούν στον θησαυρό ως εξαρτώμενα αντικείμενα. Το σημείο του θησαυρού παρέμενε στον υπολογιστή για να δώσει την δυνατότητα στους μαθητές να διερευνήσουν το πρόβλημα. Η ερευνήτρια είχε φροντίσει να συνδέσει το ευθύγραμμο τμήμα KL με ίχνος, ώστε κάθε κίνηση του σημείου F, είχε σαν αποτέλεσμα τη μετακίνηση του ευθυγράμμου τμήματος KL το οποίο διέγραφε μια νέα γραμμή στην οθόνη αφήνοντας το ίχνος της (Σχήμα 1β). Οι μαθητές στην πειραματική ομάδα έπρεπε να διερευνήσουν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας δυναμικά μέσα.

Οι μαθητές πειραματίστηκαν με το εργαλείο ίχνους (trace) του ευθυγράμμου τμήματος KL και διαπίστωσαν ότι ο θησαυρός παρέμενε στο ίδιο σημείο. Ο μαθητής M1 έχει επίπεδο 1 και η μαθήτρια 2. Η ερευνήτρια ώθησε τους μαθητές να κρύψουν την αρχική κατασκευή και να κάνουν μια δική τους κατασκευή από την αρχή, ακολουθώντας τις οδηγίες του προβλήματος.

599. Ερ : *ποιο σημείο θα μετακινήσουμε ώστε να εξετάσουμε τι θα γίνει με τον θησαυρό;*

600. M1: *Το F*

616. Μ2: *Πρώτα να ενώσουμε το P και το O* (διστακτικά) (Σχήμα 1γ)

618. Μ1: *Τώρα βάλε ένα σημείο F πάνω στο PO. Όπου και να το βάλεις ο θησαυρός εκεί θα μείνει.*

655. Μ2: *να κάνουμε να συμπίπτει το σημείο F με το δέντρο ;*

657. Μ1: *να είναι το μέσο της PO ;* Ο μαθητής Μ1 παίρνει το ποντίκι και σύρει το F ώστε να είναι περίπου στο μέσο του PO.

660. Μ1: *Αν κάνουμε δυο rotation δηλαδή να στρέψουμε το PF και το FO τότε θα έχουμε κάνει την ίδια κατασκευή.*

667. Μ2: *αν ενώσουμε το F με το T τότε θα είναι άξονας συμμετρίας.*

668. Ερ : *που θα βρει κάποιος τον θησαυρό;*

669.Μ2: το KT=TL …είναι το F το μέσο PO (και είναι και άξονας συμμετρίας) άρα είναι κάθετη και το PF=FO …δηλαδή είναι πάνω στην μεσοκάθετη επομένως KT=TL ….αλλά σε πόση απόσταση.

672. Μ1: *Θα προχωρήσει πάνω στην μεσοκάθετο στη μισή απόσταση της PO*

Τα εργαλεία απόκρυψης/εμφάνισης (hide/show), ίχνος ευθύγραμμου τμήματος (trace), περιστροφής (rotation), σε συνδυασμό με το σύρσιμο επηρέασαν μέσω της διαδικασίας εργαλειοποίησης (instrumentation) τον τρόπο σκέψης των μαθητών, και τους οδήγησαν να διατυπώσουν εικασίες και ευρήματα. Χρησιμοποιώντας το εργαλείοαπόκρυψης/εμφάνισης (hide/show), οι μαθητές κατάφεραν να κρύψουν/εμφανίσουν τις γραμμές για να πειραματιστούν. Το διάγραμμα τότε μετασχηματίστηκε, καθώς με την απόκρυψη του σημείου F, τα εξαρτώμενα αντικείμενα δεν εμφανίζονται στην οθόνη. Χρησιμοποιώντας το ίχνος ευθύγραμμου τμήματος (trace), ο Μ1 οπτικοποίησε μια αμετάβλητη ιδιότητα του διαγράμματος αναφορικά με την σταθερότητα του σημείου T. Ταυτόχρονα και κατά τη διάρκεια της εργαλειακής γένεσης, οι μαθητές έδρασαν επί των εργαλείων εξωτερικεύοντας τις σκέψεις τους. Κατασκεύασαν σχήματα χρήσης προκειμένου να αξιοποιήσουν το εργαλείο και οδηγήθηκαν σε κατασκευή εννοιών λόγω των σχημάτων εργαλειοποιημένων δράσης. Η κατασκευή περιστροφής για παράδειγμα με το εργαλείο του λογισμικού (rotation) ολοκληρώνεται ως εξής: με επιλογή ενός σημείου και ορισμό του ως κέντρου περιστροφής και στη συνέχεια επιλογή του αντικειμένου που θα στρέψουμε, με την κατάλληλη επιλογή της γωνίας περιστροφής. Ο μαθητής δεν μπορεί να ολοκληρώσει την διαδικασία αν δεν επιλέξει το ευθύγραμμο τμήμα ορίζοντας το με τα δυο άκρα του. Αυτή είναι μια τεχνολογική λεπτομέρεια στο λογισμικό η οποία λειτουργεί αποτελεσματικά ως προς την άμεση διασύνδεση της θεωρίας (ορισμού του ευθυγράμμου τμήματος) και της διεπαφής του χρήστη. Η διαδικασία περιστροφής για παράδειγμα ευθυγράμμου τμήματος κατά 90^o ως προς κέντρο περιστροφής σημείο O, δίνει ως αποτέλεσμα ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει ίσο μήκος με το αρχικό και έχει περιστραφεί κατά 90^o. Αν ο μαθητής σύρει ένα άκρο του αρχικού ευθυγράμμου τμήματος, τότε η μεταβολή του μήκους του τμήματος έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή του μήκους του εξαρτώμενου τμήματος ως αποτέλεσμα της περιστροφής. Δημιουργείται λοιπόν η νοητική εικόνα μιας συνάρτησης, αφού οποιαδήποτε μεταβολή του ευθυγράμμου τμήματος/(αντικειμένου εισόδου) έχει ως αποτέλεσμα την μεταβολή του τμήματος-εικόνας/(αντικειμένου εξόδου).

Αποτελέσματα και συζήτηση

Ο μαθητής **Μ1** διατυπώνει εικασίες σε σχέση με τις αμετάβλητες ιδιότητες του διαγράμματος [618] και συμφωνεί για την επιλογή στρατηγικής σε αλληλεπίδραση με την Μ2, σε αντίθεση με την υπόλοιπη συμπεριφορά του στην έρευνα. Λόγω του μετασχηματισμού του διαγράμματος με το συνδυασμό των εργαλείων συρσίματος-ίχνους, αναπτύσσει *επαγωγικό συλλογισμό* και διατυπώνει ένα λογικό συμπέρασμα σε μη *μαθηματική γλώσσα*, η οποία όμως περιέχει μια υπονοούμενη *γενικευμένη* «για κάθε σημείο» δήλωση. Η αιτιολόγηση του έχει άμεση σχέση με τις *μετασχηματιστικές ενέργειες* στο λογισμικό. Έχει νοητικά μετασχηματίσει και προβλέψει τους μετασχηματισμούς που αυτά τα αντικείμενα υποβάλλονται για τη λύση, χρησιμοποιώντας *μετασχηματιστικό συλλογισμό*, ενώ γενικεύει την ιδιότητα του σχήματος. Διατυπώνει στρατηγικές για την κατασκευή του σχήματος επομένως έχει *λεκτική κατανόηση* της χρήση του εργαλείου περιστροφής και *σειριακή χρήση του εργαλείου* περιστροφής. Έχει κατασκευάσει *εργαλειοποιημένο σχήμα δράσης* για το εργαλείο περιστροφής και το εργαλείο μέσου σημείου. Στο [660] χρησιμοποιεί συνδυασμό *μαθηματικής γλώσσας με τεχνολογικούς όρους* και μεταφράζει το πρόβλημα. Στο [672] εφαρμόζει ένα μείγμα *παραγωγικού και μετασχηματιστικού συλλογισμού* δίνοντας *μαθηματική λύση* στο πρόβλημα. Θεωρούμε ότι έχει αποκτήσει *ικανότητες εφαρμογής* του προβλήματος, δίνοντας επακριβώς τη λύση, καθώς περιέχει την ακριβή εφαρμογή της διαδικασίας εύρεσης λύσης, δηλαδή που θα κινηθεί κάποιος, γιατί θα κινηθεί εκεί και πόσο θα κινηθεί.

Η μαθήτρια Μ2 επινοεί μια στρατηγική καθοριστική για την επίλυση του προβλήματος στο [616]. Η μαθήτρια έχει σχηματίσει τη δομή των αξόνων συμμετρίας του ορθογωνίου που της επιτρέπει να το αναγνωρίζει ακόμα και όταν δεν είναι κατασκευασμένο στην οθόνη. Χρησιμοποιεί την προϋπάρχουσα γνώση προκειμένου να καταλήξει σε μια λύση για το πρόβλημα. Ο συλλογισμός της στο [667] περιέχει *απαγωγή*, αφού η μαθήτρια υποθέτει ότι της είναι αναγκαίο ή *υιοθετεί αυτή την υπόθεση ώστε να δοθεί εξήγηση στην περίπτωση*. Στο [669] εφαρμόζει ένα μείγμα *παραγωγικού και μετασχηματιστικού συλλογισμού* με αλυσίδα δηλώσεων.

Οι μαθητές χρησιμοποιώντας τα εργαλεία για να ολοκληρώσουν την επίλυση του προβλήματος, οδηγούνται στην *εσωτερίκευση των τεχνικών* οι οποίες με τη σειρά τους οδηγούν σε μια οργάνωση των σχημάτων χρήσης, μια εξατομίκευση και μερικές φορές έναν μετασχηματισμό του εργαλείου, ακολουθώντας μια διαφοροποίηση ως προς τον τρόπο συλλογισμού τους και επομένως ως προς τις διατυπώσεις τους. Στο περιορισμένο αυτό σημείο του διαλόγου μεταξύ των μαθητών δεν είναι εμφανής η βελτίωση στο επίπεδο της μαθητρίας Μ2 σε σχέση με το επίπεδο που είχε η μαθήτρια. Αντιθέτως ο Μ1 λειτουργεί νοητικά, αναλύει λογικά τις ιδιότητες του σχήματος και συσχετίζει ιδιότητες του σχήματος με άλλες, χρησιμοποιώντας κάποιο τύπο επαγωγικού συλλογισμού και σε άλλα σημεία μείγμα παραγωγικού και επαγωγικού συλλογισμού. Αυτά αποτελούν ενδείξεις ότι το επίπεδο του μαθητή είναι διαφορετικό από τον οπτικό και ολικό τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόταν τα σχήματα στην αρχή της διαδικασίας.

Στην αναζήτηση επομένως ενός καταλυτικού μέσου που θα παίξει ιδιαίτερο ρόλο στην αναδιοργάνωση του τρόπου σκέψης των μαθητών, στη βελτίωση των δεξιοτήτων των μαθητών, τα τεχνολογικά εργαλεία αποτελούν ένα μέσο που φαίνεται ότι δίνουν λύσεις. Είναι σημαντικό για τους δασκάλους των μαθηματικών να ξέρουν τα επίπεδα της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών τους προκειμένου να αναπτύξουν/σχεδιάσουν τις κατάλληλες δραστηριότητες οι οποίες είναι βασισμένες στο μοντέλο των van Hiele.

Αναφορές

Almeqdadi, F. (2000). *The effect of using the geometer's sketchpad (GSP) on Jordanian students' understanding of geometrical concepts*. Jordon: Yarmouk University.

Bogdan, R.C., & Biklen, S.K. (1998). *Qualitative Research for Education.* Needham Heights, MA: Allyn & Bacon.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education,* 17, 31- 48.

Crowley, M. (1987). The van Hiele model of development of geometric thought. In M. M. Lindquist (ed.), *Learning and teaching geometry, K-12* (pp. 1-16). Reston, VA: NCTM.

De Villiers, M. (1999). Mathematical treasure hunting. *KZN Math Journal,* 4(2), and *Proceedings of AMESA 2000* (pp. 271-276). Univ. Free State.

Dixon, J. (1996). *English language proficiency and spatial visualization in middle school students' construction of the concepts of reflection and rotation using the GSP*. Dissertation Abstract International, DAI-A 56111, University of Florida.

Ennis, R.: 1969, *Logic in Teaching,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education*: Monograph, 3.

Gamow, G. (1988). *One, two, three--infinity.* New York: Dover Publications.

Gawlick, T. (2005). Connecting arguments to actions –Dynamic geometry as means for the attainment of higher van Hiele levels. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 37(5), 361-370.

Growman, M. (1996). Integrating Geometer's sketchpad into a geometry course for secondary education mathematics majors. *Association of Small Computer users in Education (ASCUE) Summer Conference Proceedings*, North Myrtle Beach, SC.

Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3(3), 195-227.

Gutierrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education,* 22, 237-251.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher,* 74, 11-18.

Jackiw, N. (1991). *The Geometer's Sketchpad* [Computer Software].Berkeley, CA: Key Curriculum Press

Mason, M. M. (1997). The van Hiele model of geometric understanding and mathematically talented students. *Journal for the Education of the Gifted,* 21(1), 39-53.

Patsiomitou, S. (2008). The development of students geometrical thinking through transformational processes and interaction techniques in a dynamic geometry environment. In E. Cohen & E. Boyd (eds.) *Issues in Informing Science and Information Technology Journal,* 5, 353-393. Retrieved from http://iisit.org/IssuesVol5.htm

Patsiomitou, S. & Emvalotis, A. (2010).The development of students' geometrical thinking through a DGS reinvention process. Research Report in *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Belo Horizonte, Brazil: PME (in press).

Peirce, C.S. (1960). *Collected Papers II. Elements of Logic.* Harvard, University Press, 372.

Peirce, C. S. (1992, c. 1878a). Deduction, induction, and hypothesis. In N. Houser & C. Kloesel (eds.), *The Essential Peirce: Selected philosophical writings* (V. 1, 186-199). Bloomington: Indiana University Press.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Scher, D. (2003). Dynamic visualization and proof: A new approach to a classic problem. *The athematics Teacher,* 96(6), 394.

Senk, S. (1989). van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20(3), 309-321.

Simon, M.A. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: the search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 197-210.

Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks: SAGE Publications.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*. Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project. Chicago: University of Chicago. ERIC Document Reproduction Service No. ED220288.

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. New York: Academic Press.

Yousef, A. (1997). *The effect of the GSP on the attitude toward geometry of high school students*. Dissertation. Abstract International, A58105, Ohio University.