Η ανάπτυξη δεξιοτήτων των μαθητών μέσω μετασχηματισμών «δυναμικού» προβλήματος

Σταυρούλα Πατσιομίτου[1], Αναστάσιος Εμβαλωτής[1], Αναστάσιος Μπαρκάτσας[2]
spatsiom@cc.uoi.gr, aemvalot@uoi.gr, Tasos.Barkatsas@monash.edu
[1] ΠΤΔΕ, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
[2] Σχολή Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Monash, Αυστραλία

Περίληψη

Στην εργασία εξετάζεται ο ρόλος του προβλήματος σε δυναμικό περιβάλλον ως διαμεσολαβητικού μέσου στην ανάπτυξη δεξιοτήτων των μαθητών. Η επίλυση του προβλήματος αρχικά σε στατικό περιβάλλον, στη συνέχεια σε δυναμικό και τελικά αναδιατυπωμένο σε στατικό περιβάλλον από τους μαθητές, οδήγησε σε συμπεράσματα που διαφώτισαν τους ερευνητές για την επίδραση της χρήσης δυναμικών μετασχηματισμών, στο μετασχηματισμό των δεξιοτήτων των μαθητών.

Λέξεις κλειδιά: λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, «δυναμικό» πρόβλημα, δεξιότητες μαθητών

Εισαγωγή

Στη παρούσα μελέτη θα παρουσιάσουμε τις δυσκολίες που αντιμετώπισε η ομάδα δυο μαθητών της Α΄ Λυκείου στην ερμηνεία μέσω διαγραμμάτων της διατύπωσης ενός προβλήματος και πως η αλληλεπίδραση με το δυναμικό περιβάλλον [ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας], λειτούργησε αποτελεσματικά και καταλυτικά «στη κατανόηση της δομής του προβλήματος που αποτελεί [και] ένα σημαντικό βήμα για την [κατασκευή του διαγράμματος] και συνεπώς της επίλυσης του» (van Essen & Hamaker, 1990).

Πολλοί ερευνητές (Christiansen & Walther, 1986; Laborde et al., 2006) έχουν δώσει έμφαση στην σημασία της καταλληλότητας των προβλημάτων που διαμεσολαβούν στη διδασκαλία και τη μάθηση της γεωμετρίας. Για να κατασκευάσει ή και να επιλέξει ένας ερευνητής–εκπαιδευτικός διδακτικές δραστηριότητες, συμπεριλαμβανομένων των μαθηματικών προβλημάτων, που ενθαρρύνουν και επηρεάζουν τη *μαθηματική επανεφεύρεση* (Freudenthal, 1973) των μαθητών, πρέπει να δει το ζήτημα από την πλευρά του μαθητή, ο οποίος ενεργεί στη δραστηριότητα (*δρών/ενεργών*) και να προσπαθήσει να προβλέψει ποιοι μαθητές θα μπορούσαν να την ολοκληρώσουν» (Gravemeijer, 1999). Δηλαδή να κάνει μια νοητική μετατόπιση από την *άποψη του παρατηρητή στην άποψη του δρώντα/ ενεργούντα* (Cobb, Yackel & Wood, 1992 οπ. αναφ. στο Gravemeijer, 2004), όπου δρών/ενεργών είναι ο μαθητής, και παρατηρητής ο ερευνητής-εκπαιδευτικός. «Η πρόκληση για τον ερευνητή–εκπαιδευτικό είναι να προσπαθήσει να δει τον «*κόσμο μέσα από τα μάτια του μαθητή*» (Gravemeijer, 2004).

Η εισαγωγή των εννοιών μέσω της τοποθέτησης καταλλήλων προβλημάτων (κύρια παράμετρος στο ερευνητικό μας σχέδιο) είναι σύμφωνη με την ιδέα των Cobb, Wood, Yackel & McNeal (1992). Μέσω αυτής της διαδικασίας ο εκπαιδευτικός δεν εξηγεί ένα σύνολο κανόνων τους οποίους πρέπει να ακολουθήσει ο μαθητής ώστε να λύσει ένα πρόβλημα, αλλά η επίλυση του προβλήματος προκύπτει από τους μαθητές μέσω της διερεύνησης κατά την συζήτηση που αναπτύσσεται μεταξύ των μελών της ομάδας και του ίδιου εκπαιδευτικού-

Α. Τζιμογιάννης (επιμ.), Πρακτικά Εργασιών 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου
με Διεθνή Συμμετοχή «Οι ΤΠΕ στην Εκπαίδευση», τόμος ΙΙ, σ. 425-432
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου, Κόρινθος, 23-26 Σεπτεμβρίου 2010

ερευνητή. Στην εργασίας θα εξετάσουμε το ρόλο των διαγραμμάτων γενικότερα, αλλά και ειδικότερα σε ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, καθώς και το διαμεσολαβητικό ρόλο των προβλημάτων με χρήση «δυναμικών» γεωμετρικών διαγραμμάτων στην κατανόηση γεωμετρικών εννοιών και ανάπτυξη δεξιοτήτων των μαθητών, πλαίσιο στο οποίο εδράζεται θεωρητικά η ερευνητική μας πρόταση.

Ο ρόλος των διαγραμμάτων στην επίλυση προβλημάτων

Ένα πρόβλημα που τοποθετείται σε στατικά ή δυναμικά μέσα (π.χ. λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας), απαιτεί την κατασκευή ενός αρχικού περιγράμματος που αποτελεί την εικονική μετάφραση της διατύπωσης του προβλήματος, αλλά και τη συμπλήρωση του διαγράμματος για την επίλυση του. Η Diezmann (2005), θεωρεί ότι τα διαγράμματα έχουν τρία σημαντικά πλεονεκτήματα στην επίλυση προβλήματος: α) διευκολύνουν την αντίληψη της δομής του προβλήματος που είναι ένα σημαντικό βήμα στην επίλυση του (van Essen & Hamaker, 1990) β) είναι ένα ικανό αναπαραστατικό σύστημα (Lindsay, 1995) για την παραγωγή γνώσης (Karmiloff-Smith, 1990) και γ) υποστηρίζουν τον οπτικό συλλογισμό που είναι συμπληρωματικός, αλλά διαφέρει από τον γλωσσικό συλλογισμό (Barwise & Etchemendy, 1991). Η Laborde (2005) ισχυρίζεται ότι το περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας υποστηρίζει ένα νέο είδος διαγραμμάτων, γιατί τα διαγράμματα στο λογισμικό προκύπτουν από μια ακολουθία πρωτοτύπων που εκφράζονται με γεωμετρικούς όρους, οι οποίοι χρησιμοποιούνται από τον χρήστη και τροποποιούνται σύμφωνα με τη γεωμετρία της κατασκευής τους, παρά με την επιθυμία του χρήστη. Κατά την διάρκεια της κατασκευής ενός δυναμικού διαγράμματος ο μαθητής δομεί μια εσωτερική αναπαράσταση ως μέρος της διαδικασίας κατασκευής μια εξωτερικής αναπαράστασης. Σύμφωνα με τους Jackiw and Finzer (1993), οι μαθητές χρησιμοποιώντας το λογισμικό Geometer's Sketchpad αντιλαμβάνονται πως μια γεωμετρική κατασκευή μπορεί να οριστεί ως «σύστημα εξαρτήσεων». Οι μαθητές δηλαδή δρουν επί του γεωμετρικού διαγράμματος και διαμορφώνουν, λόγω της αλληλεπίδρασης με την τεχνική του συρσίματος, τον τρόπο σκέψης τους. Αυτό συμφωνεί με τους Noss and Hoyles (1996), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον η δραστηριότητα των μαθητών διαμορφώνεται από τα εργαλεία και τεχνουργήματα (στην περίπτωση μας τα δυναμικά διαγράμματα), καθώς στον ίδιο χρόνο αυτοί διαμορφώνουν τα δυναμικά διαγράμματα για να εκφράσουν τα επιχειρήματα τους.

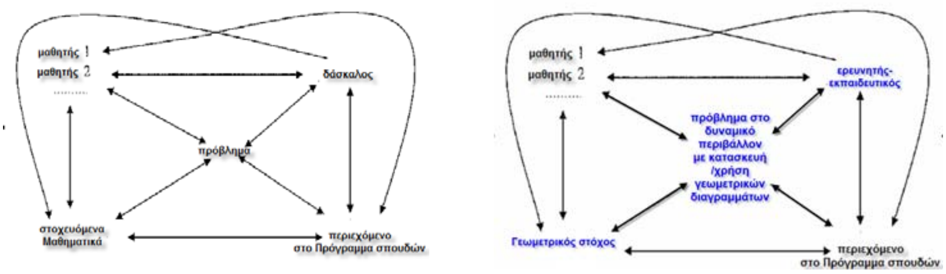
Ο διαμεσολαβητικός ρόλος των προβλημάτων στην κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών

Στο διδακτικό πείραμα της παρούσας μελέτης το γεωμετρικό πρόβλημα που τέθηκε στο περιβάλλον του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας είχε στόχο την ενεργό συμμετοχή των μαθητών της ομάδας, καθώς και την αλληλεπίδραση μεταξύ των μελών της ομάδας, του ερευνητή και του λογισμικού. Μέσω της ενεργού συμμετοχής του ο μαθητής χτίζει τη γνώση του πάνω στην «προσωπική του δραστηριότητα» (Christiansen & Walther, 1986, p.246) και τη συνεργασία του με τους άλλους μαθητές, αναπτύσσοντας ένα πρόβλημα «κατασκευαστικού, διερευνητικού τύπου». Ο όρος «προσωπική δραστηριότητα» για τους Christiansen and Walther αναφέρεται στη δυνατότητα που παρέχεται στους μαθητές να μοιραστούν τις ιδέες τους σχετικά με τη λύση του προβλήματος, στο πλαίσιο των μαθηματικών που το Πρόγραμμα Σπουδών της τάξης τους προβλέπει. Το εργαλείο του λογισμικού και το γεωμετρικό πρόβλημα που έχει τεθεί, παίζουν κεντρικό ρόλο στη δραστηριότητα και εξετάζονται ως εργαλεία διαμεσολάβησης στην κατασκευή των εννοιών σε δυο διαφορετικά επίπεδα:

- Ο δάσκαλος χρησιμοποιεί το εργαλείο του λογισμικού και το πρόβλημα για να κατευθύνει την ανάπτυξη των εννοιών που είναι (από μαθηματική άποψη) συνεπείς.
- Ο μαθητής χρησιμοποιεί τα εργαλεία που υπάρχουν στο λογισμικό ή άλλα που επινοεί μόνος του, προκειμένου να επιλύσει το πρόβλημα και να επιτευχθεί ο μαθησιακός στόχος.

Το γεωμετρικό διάγραμμα είναι ένα αναγκαίο ενδιάμεσο βήμα στην επίτευξη αυτού του στόχου. Εάν οι μαθητές δεν κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ των γεωμετρικών αντικειμένων, δεν είναι δυνατόν να κατασκευάσουν διαγράμματα και επομένως να επιλύσουν το γεωμετρικό πρόβλημα. Με αυτές τις ενέργειες τόσο το εργαλείο του λογισμικού, όσο και το πρόβλημα, λειτουργούν ως διαμεσολαβητές στην κατασκευή των εννοιών η οποία προκύπτει από τη συμμετοχή του υποκειμένου στη δραστηριότητα. Στο Σχήμα 1α των Christiansen and Walther (1986, p.247), το πρόβλημα παίζει κεντρικό ρόλο στη δραστηριότητα που αναπτύσσεται μεταξύ των δάσκαλου-μαθητή, μαθητή –μαθηματικών και δάσκαλου–Προγράμματος σπουδών. Στο Σχήμα 1β, αναπροσαρμόζουμε το διάγραμμα των Christiansen and Walther, ώστε να συμπεριληφθεί η κατασκευή/χρήση του δυναμικού διαγράμματος ως μετάφραση του προβλήματος στο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, εξειδικεύοντας κάποια από τα στοιχεία του Σχήματος 1α στο πλαίσιο της παρούσας έρευνας. Το *«δυναμικό»* πρόβλημα επομένως (πρόβλημα στο δυναμικό περιβάλλον με χρήση δυναμικών διαγραμμάτων), αποτελεί ένα ισχυρό εκπαιδευτικό εργαλείο καθώς διασυνδέει τη δραστηριότητα του υποκειμένου με το κοινωνικό περιβάλλον της τάξης ή της ομάδας.

α) **β)**



Σχήμα 1. α) Πρόβλημα και δραστηριότητα (Christiansen & Walther, 1986, p.247) β)Αναπροσαρμογή του διαγράμματος συμπεριλαμβάνοντας τα γεωμετρικά διαγράμματα

Ερευνητική μεθοδολογία

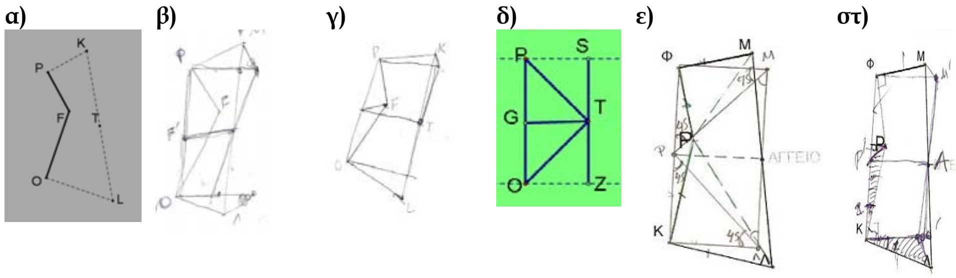
Το πρόβλημα που χρησιμοποιήθηκε ως ερευνητικό εργαλείο στην τέταρτη φάση της συνολικής ερευνητικής διαδικασίας και παρουσιάζεται στην παρούσα μελέτη ήταν η αναθεωρημένη έκδοση του «χαμένου θησαυρού των πειρατών», πρόβλημα διατυπωμένο από τον George Gamow (1948, 1988). Το πρόβλημα θεωρήθηκε ως ιδιαίτερα ενδιαφέρον επειδή επιτρέπει τρεις αρκετά διαφορετικές προσεγγίσεις (Patsiomitou, 2008): (i) την αποκαλούμενη «στατική» προσέγγιση, (ii) την υποστηριγμένη από το λογισμικό «δυναμική» προσέγγιση και (iii) μια «δυναμική» προσέγγιση μέσω των στατικών μέσων στη γεωμετρία, που αποτελείται από «τη σκέψη με κίνηση» σε ένα στατικό περιβάλλον. Αρκετοί ερευνητές έχουν εμπνευστεί και υιοθετήσει το συγκεκριμένο πρόβλημα (π.χ. Scher, 2003) εφαρμόζοντάς το σε περιβάλλον λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας όπως του Geometer's

Sketchpad (Jackiw, 1991): *Στην Οδύσσεια (γ74-77) αναφέρεται ότι πειρατές εμφανίστηκαν και στα Ελληνικά νησιά. Ο πειρατής της ιστορίας μας έθαψε τον θησαυρό του στο νησί της Θάσου, και αποτύπωσε το σχέδιο του σε ένα χάρτη. Αφού τοποθέτησε σημαία σε ένα σημείο F προχώρησε ως τον φοίνικα P, έστριψε δεξιά κατά γωνία 90° και προχώρησε ίση απόσταση. Εκεί τοποθέτησε ένα πάσαλο K. Όμοια έκανε και ως το άλλο δέντρο O. Στην συνέχεια σύνδεσε τους δυο πασσάλους και στο μέσο της απόστασης KL έθαψε τον θησαυρό. Με την πάροδο του χρόνου η σημαία καταστράφηκε (πατήστε το κουμπί Απόκρυψη αντικειμένων). Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει τον θησαυρό;*

Το πρόβλημα εξετάστηκε σε πειραματική ομάδα και σε ομάδα ελέγχου, αποτελούμενες από μαθητές της Α' Λυκείου, ομάδες οι οποίες είχαν συσταθεί στην αρχή της σχολικής χρονιάς (Patsiomitou, 2008). Το πρόβλημα είχε στόχο τη διερεύνηση της ανάπτυξης των ικανοτήτων εφαρμογής της διδασκαλίας στα τετράπλευρα. Οι μαθητές είχαν στη διάθεση τους οποιοδήποτε στατικό μέσο θα τους διευκόλυνε στην επίλυση του προβλήματος (π.χ. τα γεωμετρικά τους όργανα). Ακόμα τους παρασχέθηκαν διευκρινιστικές οδηγίες. Η μεθοδολογία του διδακτικού πειράματος στην παρούσα εργασία περιλαμβάνει την εξερεύνηση του ανοικτού προβλήματος από ένα ζευγάρι μαθητών της πειραματικής ομάδας. Διαιρείται σε τρία μέρη (Patsiomitou & Emvalotis, 2009): στο πρώτο μέρος εξετάζονται τα διαγράμματα (Σχήμα 2α,β) που κατασκευάστηκαν από τους μαθητές σε στατικό περιβάλλον (προ-τεστ), στο δεύτερο περιγράφεται η «εξερεύνηση» του προβλήματος με τη βοήθεια του Geometer's Sketchpad (μετά-τεστ) (Σχήμα 2δ), και στο τρίτο αποτυπώνεται μέσα από τις περιγραφές των μαθητών ο τρόπος κατασκευής και η σχετική αιτιολόγηση του διαγράμματος (Σχήμα 2ε,στ). Οι περιγραφές του τρίτου μέρους βασίζονται στις παρατηρήσεις της ερευνήτριας και την ανάλυση του σχετικού βίντεο. Οι μαθητές με κωδικούς Μ5, Μ6 ανήκουν στο επίπεδο 2 van Hiele. Το μοντέλο van Hiele στη γεωμετρία μας παρέχει μια συνοπτική περιγραφή της γεωμετρικής ανάπτυξης των μαθητών (Fuys et al., 1988). Ο Hoffer (1981) στο βιβλίο του "Geometry is more than Proof" υποστηρίζει ότι πρέπει να αναπτυχθούν πέντε βασικές ικανότητες στην γεωμετρία: οπτικές, λεκτικές, σχεδίασης, λογικές και εφαρμογής. Οι ικανότητες των μαθητών χρησιμοποιούνται για την ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Μέσα σε αυτό το θεωρητικό πλαίσιο, η ακόλουθη ερευνητική ερώτηση τίθεται:

Διαμεσολαβεί το «δυναμικό» πρόβλημα σε περιβάλλον λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, στον κατά Hoffer μετασχηματισμό των δυνατοτήτων των μαθητών, κατά τη διάρκεια της συνεργατικής επίλυσης με χρήση δυναμικών διαγραμματικών μετασχηματισμών;



Σχήμα 2. α) Περίγραμμα σε στατικό μέσο, β) Σχέδιο μαθητή Μ5 στο 1ο μέρος, γ) Σχέδιο μαθητή Μ6 στο 1ο μέρος, δ) Δυναμικό πρόβλημα, ε) Σχήμα του μαθητή Μ5 στο 3ο μέρος, στ) Σχήμα του μαθητή Μ6 στο 3ο μέρος

Μέρος 1ο

Τα διαγράμματα (Σχήματα 2ε, 2στ) παρήχθησαν από τους μαθητές κατά τη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος στο pro-test με χρήση χαρτιού-μολυβιού. Δοκίμασαν, αλλά διαπιστώθηκε ότι δεν ήταν ικανοί να βρουν τη λύση του προβλήματος στο στατικό περιβάλλον. Η ερευνήτρια τους βοήθησε τότε κατασκευάζοντας στον πίνακα το περίγραμμα του προβλήματος (Σχήμα 1). Στα Σχήματα 2ε, 2στ μπορούμε να δούμε ότι οι μαθητές έχουν κατασκευάσει κάποιες γραμμές που έχουν νόημα (π.χ. σύνδεση των σημείων P, O, άνισες περιστροφές τμημάτων κατά 90^{o}) και κάποιες που μάλλον αποτελέσαν ένα εμπόδιο στην επίλυση του προβλήματος. Τα σχέδια τους δείχνουν μη ικανότητα της ερμηνείας της περιστροφής τμήματος. Επομένως συμπεραίνουμε ότι α) η έλλειψη της κατανόησης της έννοιας της περιστροφής και β) η έλλειψη κατανόησης της σύνδεσης μεταξύ των γεωμετρικών αντικειμένων του προβλήματος είναι αυτές που προκάλεσαν την αδυναμία μετάφρασης σε σχέδιο και την ανακριβή χρήση μετασχηματισμών στο στατικό μέσο.

Μέρος 2ο

Οι μαθητές στη συνέχεια πειραματίστηκαν στο λογισμικό για την εύρεση της λύσης. Ο όρος του προβλήματος «*έστριψε δεξιά κατά γωνία 90^{o} και προχώρησε ίση απόσταση*» μεταφράστηκε από τους μαθητές σε σχέδιο με περιστροφή του τμήματος μέσω του μενού Μετασχηματισμός. Οι μαθητές επινόησαν στρατηγική επίλυσης με χρήση της ειδικής περίπτωσης, κάτι που όπως φαίνεται στα σχέδια 4, 5, είχαν αρχίσει να σκέφτονται στην 1η φάση. Μια παρατήρηση των απαντήσεών τους στο ενδεικτικό τμήμα του διαλόγου δείχνει ότι το λογισμικό έχει βοηθήσει τους μαθητές να απαντήσουν «σε υψηλότερο επίπεδο» από αυτό που δείχνει το προ-τεστ van Hiele. Για παράδειγμα ο μαθητής Μ5 «αρχίζει να αναπτύσσει αλυσίδα δηλώσεων και να καταλαβαίνει τη σημασία της αφαίρεσης» (de Villiers, 2004). Ο Μ5 διατυπώνει μια «αν…τότε» δήλωση, που ακολουθεί μια υπόθεση που περικλείει αντιστροφή. Οι μαθητές έχουν οδηγηθεί σε λογικά συμπεράσματα συσχετίζοντας κατάλληλα θεωρήματα και μεταφράζοντας τη μαθηματική σε ρεαλιστική επίλυση προβλήματος. Οι δυναμικοί μετασχηματισμοί στα διαγράμματα βοήθησαν τους μαθητές να υπερνικήσουν τα εμπόδιά τους, και να εφαρμόσουν λύσεις για το πρόβλημα.

Μ5: *Γιατί δεν ξεκινάμε αντίστροφα; …Να πάρουμε το μέσο της PO και να κατασκευάσουμε με rotation τα σημεία S, Z. Αν ενώσουμε τα σημεία S, Z τότε θα περνά από τον θησαυρό T.*

Μ5, Μ6: *τα τρίγωνα που σχηματίστηκαν είναι ορθογώνια και ισοσκελή* (ταυτόχρονα)

Μ5, Μ6: *οι γωνίες είναι 45^{o}…. και το σχήμα PSTG είναι τετράγωνο* (ταυτόχρονα)

Ερ: *σε ποιο σημείο επομένως είναι ο θησαυρός;*

Μ5: *Στη μισή της SZ η οποία είναι ίση με το PO.*

Μέρος 3ο

Η ερευνήτρια θεώρησε ότι πιθανότατα δεν είχε δοθεί στους μαθητές αρκετή βοήθεια κατά τη διερεύνηση του προβλήματος στο στατικό περιβάλλον. Αποφάσισε λοιπόν να επανεξετάσει το ίδιο πρόβλημα μετά από ένα μήνα και ενώ δεν είχε ξανά-ασχοληθεί με το ίδιο θέμα. Για το λόγο αυτό αναδιατύπωσε το πρόβλημα, κάνοντας χρήση των διαφορετικών τρόπων προσέγγισης που χρησιμοποίησαν οι μαθητές, τοποθετώντας τη θέση του σημείου Φ της σημαίας σε ειδική θέση. Ο λόγος που έγινε αυτό είναι γιατί ήθελε να δει τη λύση του προβλήματος από την πλευρά του μαθητή δηλαδή ως *δρών/ενεργών μαθητής* και όχι ως *δάσκαλος-παρατηρητής* (Cobb, Yackel & Wood, 1992). Το αναδιατυπωμένο πρόβλημα (Patsiomitou, 2008) έχει ως εξής: «Ένας αρχαιολόγος γνωρίζει ότι η θέση του αγγείου είναι στο εξής σημείο του χάρτη: Από το σημείο Ρ που στέκεται πρέπει να προχωρήσει μέχρι το σημείο Φ, να στρίψει κάθετα σε ίση απόσταση (τοποθετώντας το σημείο Μ). Ομοίως αν επανέλθει στο σημείο Ρ να προχωρήσει μέχρι το σημείο Κ και να στρίψει κάθετα πάλι σε ίση απόσταση (τοποθετώντας το σημείο Λ). Το αγγείο είναι στο μέσο της απόστασης ΜΛ .Αντί όμως να ακολουθήσει την προτεινόμενη από το χάρτη μέθοδο εφάρμοσε την εξής διαδικασία: Ξεκίνησε από το μέσο της απόστασης ΦΚ, επανέλαβε τη διαδικασία που του έλεγε ο χάρτης και βρήκε το αγγείο. α) Μπορείτε να σχεδιάσετε το σχήμα σύμφωνα με τα βήματα που ο αρχαιολόγος ακολούθησε; β) μπορείτε να εξηγήσετε γιατί ο συλλογισμός του ήταν σωστός;»

Το πρόβλημα εξετάστηκε εκ νέου από τους μαθητές και των δυο ομάδων. Η ομάδα ελέγχου δεν παρουσίασε καμιά ιδιαίτερη βελτίωση, επομένως η αναδιατύπωση του προβλήματος δεν έπαιξε ρόλο. Θα περιοριστούμε στην συμπεριφορά των δύο μαθητών εξετάζοντας και αναλύοντας τη νοητική τους προσέγγιση και την αιτιολόγηση που οι μαθητές κάνουν προκειμένου να λύσουν το πρόβλημα. Ο Μ5 δεν παρήγαγε ακριβή διαγράμματα σε προηγούμενα τεστ. Στο Σχήμα 2ε παρατηρούμε ότι κατανόησε τη διατύπωση του προβλήματος και κατασκεύασε ένα ακριβές διάγραμμα αποτυπώνοντας τη διαδικασία που είχε εφαρμόσει στο δυναμικό μέσο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η διαδικασία περιστροφής στο λογισμικό τον οδήγησε να κατανοήσει την περιστροφή κατά 90^{o} σε ίση απόσταση. Η αναλυτική μέθοδος που ο μαθητής είχε εφαρμόσει στο λογισμικό ακολούθησε την αρχική αποτυχημένη προσπάθειά του. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα ο μαθητής να οδηγηθεί σε μια σύνθετη κατασκευή στο χαρτί, που μαθητές υψηλότερου επιπέδου από ότι ο Μ5 δεν ήταν σε θέση να κατασκευάσουν. Ο μαθητής Μ5 όταν έκανε την τροποποίηση στο σχήμα θέτει τα ίδια γράμματα στην κατασκευή του, γεγονός που δηλώνει ότι έχει συνειδητοποιήσει τι ακριβώς κατασκευάζει και ποια είναι η τροποποίηση στο πρόβλημα που πρότεινε ο αρχαιολόγος. Στο Σχήμα 2ε τοποθετεί το αγγείο στο μέσο της απόστασης ΜΛ και μάλιστα απέναντι από το σημείο Ρ. Η ΜΛ επομένως στο σχήμα του (Σχήμα 2ε) ερμηνεύεται με την ίδια ιδιότητα που έχει η αρχική ΜΛ και για το λόγο αυτό διέρχεται από το σημείο που είναι το αγγείο. Στη συνέχεια ακολούθησε σύγκριση, η οποία αποκαλύπτει ότι ο μαθητής οδηγήθηκε σε παραγωγικό συλλογισμό. Χρησιμοποιεί το κριτήριο ισότητας για την αιτιολόγηση του και καταλήγει σε λογικό συμπέρασμα. Ο μαθητής συνέκρινε τα δυο τρίγωνα ΡΦΜ και ΡΚΛ, τα οποία γνωρίζει ότι είναι ισοσκελή και ορθογώνια (έχει σημειώσει τις 45^{o}) και χρησιμοποιεί αυτό το συμπέρασμα για να αιτιολογήσει τον ισχυρισμό του ότι το τρίγωνο ΡΜΛ είναι ισοσκελές. Ο μαθητής επιχειρηματολογεί ισχυριζόμενος ότι «Ο αρχαιολόγος βρήκε με δικό του τρόπο το αγγείο γιατί και στις δυο περιπτώσεις το αγγείο βρίσκεται στο μέσο της βάσης του τμήματος ΜΛ». Το γραπτό του μαθητή, η εικονική δηλαδή μετάφραση της διατύπωσης του προβλήματος, οι αιτιολογήσεις και διατυπώσεις του, μας οδηγούν να συμπεράνουμε ότι το επίπεδο του μαθητή είναι υψηλότερο από 2 σύμφωνα με την θεωρία των van Hiele. Ο μαθητής Μ6 έχει κατανοήσει τη διαδικασία περιστροφής ενός τμήματος σε γωνία. Ο μαθητής έχει κατασκευάσει ένα νοητικό σχήμα για τον τρόπο περιστροφής του τμήματος κατά 90^{o} που εφαρμόζει στη λύση του προβλήματος στα στατικά μέσα. Συνδέει τα Ρ, Ρ′ και συγκρίνει τα δυο τρίγωνα. Ο συλλογισμός του Μ6 είναι διαφορετικός από το συλλογισμό του στο λογισμικό. Ο μαθητής συγκρίνει τις δυο ομάδες τριγώνων προκειμένου να καταλήξει στην ισότητα των τμημάτων ΜΜ′ και ΛΛ′ και αιτιολογεί την ισότητα κάθε στοιχείου. Αυτό είναι εμφανές και στο σχήμα του (Σχήμα 2στ), στο οποίο σημειώνει τα ίσα τμήματα. Η σύγκριση επιβεβαιώνει ότι ο μαθητής έχει κατασκευάσει ένα νοητικό μοντέλο της περιστροφής τμήματος μέσω του «δυναμικού προβλήματος», αφού το χρησιμοποιεί για την απόδειξη της ισότητας.

Συζήτηση

Έχει αποδειχθεί ότι οι μαθητές επιπέδου 1 ή 2 του επιπέδου van Hiele συνήθως αποτυγχάνουν στην κατασκευή γεωμετρικών διαγραμμάτων που είναι στοιχειώδη για την επίλυση προβλημάτων (Schumann and Green, 1994). Επιπλέον τα διαγράμματα των μαθητών, μας παρέχουν μια εκτίμηση αναφορικά με τις αδυναμίες των μαθητών σε θέματα μαθηματικής γνώση (Diezmann, 2000). Η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος, όπως παρουσιάστηκε παραπάνω, μας οδήγησε να συμπεράνουμε τα εξής:

1) οι μαθητές στο στατικό περιβάλλον αδυνατούν να κατανοήσουν τη διατύπωση ενός προβλήματος με κίνηση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη μη-ακριβή κατασκευή διαγραμμάτων, και κατά συνέπεια τη μη επίλυση του γεωμετρικού προβλήματος. Επομένως οι μαθητές στο 1ο μέρος δείχνουν να μην έχουν αναπτύξει ικανότητες *σχεδιαστικές*, *λογικές* και *εφαρμογής*.

2) το δυναμικό περιβάλλον δίνει τη δυνατότητα πειραματισμού μέσα από τη χρήση των δυναμικών τεχνικών και ανάπτυξης της δυναμικής οπτικοποίησης. Οι μαθητές οδηγούνται να παρατηρήσουν τις αμετάβλητες ιδιότητες του διαγράμματος και να κατασκευάσουν έννοιες, όπως την έννοια της ισότητας και καθετότητας των τμημάτων από περιστροφή (κατά 90^o). Η χρήση των δυναμικών μετασχηματισμών οδηγεί τους μαθητές να διαμορφώσουν το διάγραμμα και ο μετασχηματισμός του διαγράμματος οδηγεί στην διατύπωση μαθηματικών δηλώσεων, όπως αιτιολογήσεων με αλυσίδα λογικών επιχειρημάτων και χρήση μαθηματικών συμπερασμάτων για εφαρμογή της λύσης στο πραγματικό πρόβλημα. Θεωρούμε λοιπόν ότι το δυναμικό περιβάλλον δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να αναπτύξουν τις ικανότητες *λογικής* και *εφαρμογής*.

3) Στο 3ο μέρος οι μαθητές μεταφράζουν το πρόβλημα σε ένα δυναμικό διάγραμμα που τους οδηγεί σε μαθηματικό μοντέλο. Οι μαθητές έτσι αποκτούν ικανότητες *οπτικές,* αφού συνδυάζουν αναγνώριση σχημάτων σε διαφορετικές μορφές αναπαράστασης, *λεκτικές, αφού* διατυπώνουν με ακριβή και τυπικό τρόπο τις γεωμετρικές ιδιότητες ενός σχήματος, *σχεδιαστικές,* αφού έχουν την ικανότητα να μεταφράσουν την προφορική πληροφορία σε σχέδιο, *λογικές,* αφού χρησιμοποιούν κατάλληλα θεωρήματα (π.χ. κριτήρια ισότητας τριγώνων) για να αποδείξουν μια πρόταση, και *εφαρμογής,* αφού μετά την επίλυση του προβλήματος μεταφράζουν τα μαθηματικά αποτελέσματα για την επίλυση του πραγματικού προβλήματος. Η επίδραση επομένως των μετασχηματισμών ήταν συνειδητή διαδικασία, αφού οι μαθητές μπόρεσαν να εφαρμόσουν τη λύση του προβλήματος σε στατικά μέσα, ακόμα και όταν το πρόβλημα παρουσιάστηκε αναδιατυπωμένο.

Το πρόβλημα στο δυναμικό περιβάλλον οδήγησε τους μαθητές στην αναδόμηση της προϋπάρχουσας γνώσης και την διατύπωση ιδιοτήτων. Οδηγούνται δηλαδή μέσω του *δυναμικού* προβλήματος από το *οπτικό αντιληπτικό* επίπεδο, στο *θεωρητικό* επίπεδο, στο οποίο οι ορισμοί και οι ιδιότητες των σχημάτων διαφοροποιούνται. Τα σημεία που χρησιμοποιούν στο διάγραμμα και τα τμήματα που συνδέουν μεταξύ τους τα βασικά στοιχεία του διαγράμματος στο 3ο μέρος, αποτελούν ένδειξη της παραγωγικής πτυχής της επιχειρηματολογίας, που δεν φαίνεται στην επίλυση του προβλήματος στο 1ο μέρος. Επομένως το *«δυναμικό»* πρόβλημα διαμεσολαβεί μετασχηματίζοντας την εννοιολογική θεώρηση των μαθητών για το μαθηματικό αντικείμενο του διαγράμματος, παρέχοντας πληροφορίες στους μαθητές ώστε να μετασχηματίσουν το αρχικό σχέδιο σε σχήμα.

Αναφορές

Barwise, J., & Etchemendy, J. (1991). Visual information and valid reasoning. In W.Zimmerman & S. Cunningham (eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 9-24). Washington, DC: Math. Assoc. of America.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 243-307). Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education,* 23**(**1), 2-33.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis. *American Educational Research Journal,* 29, 573-604.

De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 35(5), 703–724.

Diezmann, C. M. (2000). The difficulties students experience in generating diagrams for novel problems. In T. Nakahara & M. Koyama (eds.), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 241-248), Hiroshima, Japan: PME.

Diezmann, C. M. (2005). Primary students' knowledge of the properties of spatially-oriented diagrams. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the InternationalGroup for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 281-288). Melbourne: PME.

van Essen, G., & Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research*, 83(6), 301-312.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

Gamow, G. (1988). *One, two, three--infinity*. New York: Dover Publications.

Gravemeijer, K. P. E. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning,* 1, 155–177.

Gravemeijer, K. P. E. (2004). *Creating opportunities for students to reinvent mathematics*. Paper presented at ICME 10, July 4-11, Kopenhagen, Denmark.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher,* 74, 11-18.

Jackiw, N. (1991). *The Geometer's Sketchpad.* Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Jackiw, R.N., & Finzer, F.W (1993). The Geometer's Sketchpad: programming by geometry, In A. Cypher (Ed.), *Watch what I do: programming by demonstration* (pp. 293-308). Cambridge, London: The MIT Press.

Karmiloff-Smith, A. (1990). Constraints on representational change: Evidence from children's drawing. *Cognition,* 34, 57-83.

Laborde, C. (2005). The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Shovsmose & P. Valero (eds.), *Meaning in mathematics education* (pp. 159-179). New York: Springer.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez & P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 275-304). Rotterdam: Sense Publishers.

Lindsay, R. K. (1995). Images and Inferences. In J. Glasgow, N. H. Narayanan, & B. C. Karan (eds.), *Diagrammatic reasoning* (pp. 111- 135). Menlo Park, CA: AAI Press.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers*. Dordrecht: Kluwer.

Patsiomitou, S. (2008). The development of students' geometrical thinking through transformational processes and interaction techniques in a dynamic geometry environment. In E. Cohen & E. Boyd (eds.) *Issues in Informing Science and Information Technology Journal* (v. 5, pp. 353-393). Retrieved 12 March 2010 from http://iisit.org/IssuesVol5.htm

Patsiomitou, S., & Emvalotis, A. (2009). Developing geometric thinking skills through dynamic diagram transformations. *In Proceedings of the Sixth Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp. 249-258). Plovdiv, Bulgaria.

Schumann, H., & Green, D. (1994). *Discovering geometry with a computer - using Cabri Géomètre*. Lund: Studentlitteratur.

Scher, D. (2003). Dynamic visualization and proof: A new approach to a classic problem. *The Mathematics Teacher,* 96(6), 394.