Τα δυναμικά περιβάλλοντα γεωμετρίας και οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί, ως μαθησιακό δίπολο αναχαίτισης μαθητικών ολισθημάτων, κατά την πραγμάτευση μέτρησης εμβαδών και των μονάδων τους

Αλέξιος Μαστρογιάννης[1], Αντιγόνη Τρύπα[2]
alexmastr@yahoo.gr, tryanta@sch.gr
[1] Διευθυντής 16^{ου} Δημοτικού Σχολείου Αγρινίου
[2] 16^{ο} Δημοτικό Σχολείο Αγρινίου

Περίληψη

Η καθημερινή εφαρμογή και χρήση και οι πλούσιες μαθηματικές της προεκτάσεις καθιστούν τη μέτρηση του εμβαδού έννοια θεμελιώδους σημασίας. Έρευνες έχουν καταδείξει, όμως, μια σειρά από προβλήματα, δυσκολίες και παρανοήσεις, κατά τη μάθησή της. Ο αλγόριθμος εφαρμογής, η σύγχυση με την περίμετρο, η επιλογή και οι επαναλήψεις των μονάδων μέτρησης, η έλλειψη κατανόησης των εννοιών που το συνθέτουν και ο παραδοσιακός, συμπεριφοριστικός τρόπος μάθησης του σχετικού αλγόριθμου, προβάλλουν ως τα κυριότερα μαθησιακά προσκόμματα. Η παρούσα πρόταση με τη «δυναμική» ενίσχυση του Cabri Geometry και του μετασχηματισμού της μεταφοράς-μετατόπισης και μέσω δραστηριοτήτων «βιωματικού τύπου» πλακόστρωσης μιας αυλής, αποπειράται να υπερφαλαγγίσει τις παραπάνω δυσκολίες.

Λέξεις κλειδιά: Cabri Geometry, μονάδες μέτρησης, εμβαδόν, γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

Εισαγωγή

Η μέτρηση του εμβαδού είναι σημαντική μαθηματική έννοια στα σχολικά μαθηματικά και γι΄ αυτό, δικαιολογημένα καλύπτει, σχετικά, μεγάλο μέρος στην ύλη των Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών της Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης. Γενικά η μέτρηση είναι οικουμενική και κεφαλαιώδης δραστηριότητα, με οριζόντια πολιτισμική διάχυση, σε όλους ανεξαιρέτως τους λαούς και σε πολλές κοινωνικές εκφάνσεις, όπως στην επιστήμη, στην τεχνολογία αλλά και στην απλή καθημερινότητα (Κορδάκη, 1999). Πολλές και ποικίλες, καθημερινές εφαρμογές συνηγορούν υπέρ και της σπουδαιότητας της μάθησης του εμβαδού και της μέτρησής του. Η ζωγραφική, η κηπουρική, οι επιστρώσεις και οι επικαλύψεις επιφανειών είναι κάποιες, ενδεικτικές περιπτώσεις (Cavanagh, 2008).

Η μέτρηση των επιφανειών καταχωρίζεται ως μία, λίαν σημαντική και θεμελιακή μαθηματική έννοια, εξαιτίας των πολλών διασυνδέσεων και αρωγών της σε πλείστες άλλες μαθηματικές έννοιες και περιοχές. Η έννοια του αριθμού, η κατανόηση των πολλαπλασιαστικών δομών μεταξύ ακεραίων αλλά και (πολύ περισσότερο) μεταξύ κλασμάτων, η ομοιότητα, οι μεγεθύνσεις, η αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού, η κατανόηση του αναπτύγματος των διωνύμων αλλά και ο ολοκληρωτικός λογισμός είναι μαθηματικές ενότητες, άρρηκτα συνδεδεμένες με τη μέτρηση του εμβαδού επιφανειών και έπονται, στις περισσότερες των περιπτώσεων, της μελέτης του (Κορδάκη, 1999; Cavanagh, 2008). Μάλιστα, η έννοια του εμβαδού γεφυρώνει το σύμπαν των συγκεκριμένων και απτών, φυσικών αντικειμένων με τον αφηρημένο κόσμο των αριθμών.

Α. Τζιμογιάννης (επιμ.), Πρακτικά Εργασιών 7^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου
με Διεθνή Συμμετοχή «Οι ΤΠΕ στην Εκπαίδευση», τόμος II, σ. 453-457
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου, Κόρινθος, 23-26 Σεπτεμβρίου 2010

Η εύρεση του εμβαδού μιας επιφάνειας μπορεί να θεωρηθεί ως η «επίστρωση» (ή διαχωρισμός) μιας περιοχής με μια δισδιάστατη μονάδα μέτρησης, λαμβανομένων υπόψη ότι οι επιφάνειες δεν επικαλύπτονται και το εμβαδό της ένωσης δυο επιφανειών είναι το άθροισμα των επιμέρους εμβαδών (Clements & Stephan, 2004). Υπάρχουν, τουλάχιστον, πέντε θεμελιώδεις έννοιες που περιλαμβάνονται στην εκμάθηση της μέτρησης επιφανειών: α) Διαχωρισμός, β) Επανάληψη μονάδων, γ) Διατήρηση, δ) Γραμμική μέτρηση και ε) Δόμηση σειρών.

Ο διαχωρισμός είναι η διανοητική πράξη της τμήσης μιας επιφάνειας δυο διαστάσεων, μέσω μιας δισδιάστατης μονάδας. Οι μαθητές, καθώς καλύπτουν επιφάνειες, δίχως κενά και επικαλύψεις, μπορούν επίσης να αναπτύξουν την έννοια της επανάληψης μονάδων. Η στρατηγική δε, της (επι)κάλυψης είναι η κύρια μέθοδος της ευκλείδειας γεωμετρίας, κατά τον προσδιορισμό ισεμβαδικών σχημάτων (Zacharos, 2005). Ακόμα, μια καλή υποδομή στη μέτρηση μηκών είναι απαραίτητη προϋπόθεση κατά τη μέτρηση επιφανειών, αφού, προφανώς, η μέτρηση του εμβαδού είναι προϊόν 2 μετρήσεων (Clements & Stephan, 2004).

Μαθησιακά προβλήματα κατά την εκμάθηση του εμβαδού

Πολλές έρευνες τονίζουν τα προβλήματα, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε σχέση με την κατανόηση της διαδικασίας μέτρησης επιφανειών (όπως παρατίθενται στο Μαστρογιάννης & Αλπάς, 2008). Ο αλγόριθμος εφαρμογής, η σύγχυση με την περίμετρο, η επιλογή και οι επαναλήψεις των μονάδων μέτρησης αλλά και η έλλειψη κατανόησης των εννοιών που το συνθέτουν αναφέρονται ως σημαντικά μαθησιακά προσκόμματα και ως οι κυριότερες δυσκολίες των μαθητών. Ο παραδοσιακός τρόπος της διδασκαλίας, ο οποίος βασίζεται στην «μπιχεβιοριστική» μάθηση του αλγόριθμου, κρατά τη μερίδα του λέοντος στις επικριτικές αναφορές. Ενώ το μήκος μετριέται άμεσα, το εμβαδόν υπολογίζεται έμμεσα με τη χρησιμοποίηση των μηκών των στοιχείων, τα οποία εμφανίζονται στον τύπο του εμβαδού (Zacharos, 2005). Τα παιδιά μαθαίνουν, συχνά έναν κανόνα, όπως ο πολλαπλασιασμός δύο αποστάσεων, χωρίς καμιά σημασία για αυτά. Οι προσπάθειες ώστε να διδαχτεί ο σύντομος αλγοριθμικός υπολογισμός, πριν την δομική εισαγωγή των σειρών και γραμμών αποβαίνουν θνησιγενείς, μαθησιακά (Reynolds & Wheatley, 1996).

Ακόμα έχουν παρατηρηθεί μερικές κοινές παρερμηνείες και παρανοήσεις, όσον αφορά, πάντα, στην κατανόηση του εμβαδού, δεδομένου ότι, μερικές φορές, οι μαθητές (Cavanagh, 2008) εξετάζουν το μήκος μόνο μιας από τις πλευρές του ορθογωνίου, υπολογίζουν τις μονάδες γύρω από τη γωνία ενός ορθογωνίου διπλά, ενώ μετρούν τα σημάδια επισήμανσης, παρά υπολογίζουν τις μονάδες. Ακόμα, προσθέτουν τα μήκη των πλευρών, αντί να τα πολλαπλασιάσουν, υπεργενικεύουν τους τύπους των εμβαδών και, τέλος, συγχέουν την περίμετρο με το εμβαδό.

Εστιάζοντας, τώρα στη σχολική πραγματικότητα, μπορεί εύκολα και αβίαστα να παρατηρηθεί ότι πολλά εγχειρίδια παρουσιάζουν περιοχές που είναι ήδη διαχωρισμένες. Οι μαθητές, μετρούν τις μονάδες μία-μία, διαδικασία, όμως, που αποκρύπτει τη δομή της σειράς, αφού η προσοχή δεν επικεντρώνεται σε αυτή (Cavanagh, 2008). Επιπλέον, η τάση να προκρίνονται πολύ γρήγορα οι διαδικασίες πολλαπλασιασμού, μέσω της χρήσης των τύπων, στερεί τους μαθητές από την ευκαιρία να μελετηθεί το σχέδιο και η δομή της σειράς (Kordaki & Potari, 2002; Clements & Stephan, 2003). Ο αλγόριθμος του υπολογισμού των εμβαδών προσφέρεται, παιδαγωγικά, να παρουσιασθεί ως μια τελική τεχνική και μέθοδος, που αποσκοπεί στην αποφυγή της χρονοβόρας, επίπονης και, πολλές φορές, σφαλερής διαδικασίας μέτρησης των μονάδων, οι οποίες καλύπτουν την εξεταζόμενη επιφάνεια.

Η διδακτική «εικονική» πρόταση

Οι ευκλείδειοι μετασχηματισμοί (μεταφορά, ανάκλαση και περιστροφή) είναι οι πλέον συνηθέστεροι στη Γεωμετρία, όπου το σχήμα των αντικειμένων δε μεταβάλλεται, αφού διατηρούνται τα μήκη και τα μέτρα των γωνιών. Μόνο η θέση και ο προσανατολισμός των αντικειμένων αλλάζουν. Ως ο πλέον πρωταγωνιστικός μετασχηματισμός θεωρείται η παράλληλη μεταφορά, με εικόνα ένα αντικείμενο που ολισθαίνει-μετατοπίζεται, κατά ένα συγκεκριμένο διάνυσμα. Ο μετασχηματισμός αυτός είναι ισομετρία, αφού διατηρούνται οι αποστάσεις των σημείων και αποτελεί ειδική περίπτωση ομοιομορφισμού στα Μαθηματικά.

Οι φυσικοί τρόποι μετατόπισης ενός αντικειμένου, μέσω μεταφοράς, (αλλά και ανάκλασης ή περιστροφής), εύκολα ορίζονται με ακραιφνώς μαθηματικούς όρους, γεγονός που ευνοεί, γενικότερα, τη συνολική μελέτη των γεωμετρικών μετασχηματισμών (Kelly, 1971). Η μελέτη αυτή, που αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία ως Γεωμετρία της Κίνησης (Motion Geometry), έχει πολλά ελκυστικά παιδαγωγικά χαρακτηριστικά, αφού μπορεί να αυξήσει και να ρυθμίσει τις διαισθητικές εικασίες των μαθητών, με βάση τις πρότερες γνώσεις τους. Περιέχει ακόμα μερικές γνήσιες εκπλήξεις που προκύπτουν από την απλή εφαρμογή των βασικών ιδιοτήτων της Γεωμετρίας της κίνησης (Brieske & Lott, 1978).

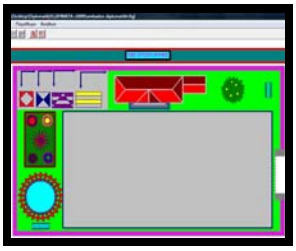
Το περιβάλλον Cabri-Geometry II παρέχει δυνατότητες κατασκευής και πραγματοποίησης μαθησιακών δραστηριοτήτων σύμφωνα με τις σύγχρονες κοινωνικές και εποικοδομιστικές θεωρήσεις για τη γνώση και τη μάθηση. Διαθέτει ένα πλούσιο περιβάλλον δραστηριοποίησης, κατά τη μελέτη της γεωμετρίας. Δημιουργεί ένα νέο τρόπο σκέψης όσον αφορά σε γεωμετρικές καταστάσεις, ενώ προσφέρει εντολές για τη δημιουργία σχημάτων αλλά και τρόπους, ώστε να μπορούν αυτά να μετακινηθούν άμεσα και αυτόματα. Μάλιστα, ολόκληρο μενού είναι αφιερωμένο στην εκτέλεση-κατασκευή μετασχηματισμών (Smith, 1999; Μαστρογιάννης, 2008).

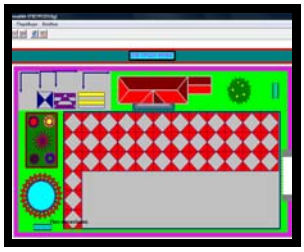
Η παρούσα εργασία επιχειρεί να αναδείξει τη μαθησιακή συνισταμένη, προσποριζόμενη οφέλη και «διδακτικό οπλισμό» κατά την αναχαίτιση μαθητικών ολισθημάτων, από τον, κυριολεκτικά, δυναμικό συνδυασμό δυο σημαντικών συνιστωσών α) των δυναμικών περιβαλλόντων Γεωμετρίας και β) του γεωμετρικού μετασχηματισμού της μεταφοράς, κατά τη μελέτη μονάδων μέτρησης εμβαδών, επιπέδων σχημάτων. Χρησιμοποιώντας το Cabri Geometry έχει σχεδιαστεί μονοκατοικία, με τις σχετικές εγκαταστάσεις. Ο αύλειος χώρος χρειάζεται να επιστρωθεί με πλακίδια, τα οποία μπορεί να θεωρηθούν ως μονάδες μέτρησης. Τα πλακίδια (2 τετραγωνικά και 2 ορθογώνια) είναι διαφόρων χρωμάτων και σχεδίων, μπορούν να μεταφερθούν και να τοποθετηθούν σε κατάλληλη θέση στην ορθογώνια αυλή.

Ακολούθως, μέσω του μετασχηματισμού της μεταφοράς–μετατόπισης, καλύπτουν την επιφάνεια, άλλοτε μετατοπιζόμενα οριζόντια και άλλοτε κάθετα (οι αρχικές εικόνες-πλακίδια παραμένουν). Τα διανύσματα (Σχήμα 1), κάθε φορά, (οριζόντιο ή κάθετο) είναι προσχεδιασμένα και τα μέτρα τους ισούνται με τη διάσταση του τετράγωνου πλακιδίου. Ανάλογη είναι και η κατασκευή, όσον αφορά στις 2 διαστάσεις των ορθογώνιων μονάδων.

Όταν π.χ. το ορθογώνιο πλακίδιο, μετατοπίζεται κάθετα, το προσχεδιασμένο διάνυσμα έχει μέτρο, πάντοτε, ίσο με την αντίστοιχη διάσταση του πλακιδίου–μονάδας μέτρησης. Οι μονάδες μπορούν να μετασχηματίζονται δυναμικά και να αυξομειώνουν το μέγεθός τους. Αντίστοιχη διαφοροποίηση υφίστανται, ταυτόχρονα, και οι εικόνες τους (επιστρωμένα πλακίδια) αλλά και τα προσχεδιασμένα, δηλωτικά διανύσματα της μετατόπισης. Στόχος της συγκεκριμένης πρότασης είναι να αναδειχθεί ότι η δομή των σειρών-στηλών είναι εξαιρετικά σημαντική και παράλληλα οι μαθητές να μάθουν να κατασκευάζουν σειρές και στήλες και να μετρούν τις μονάδες. Ακολουθείται ο «φυσικός» τρόπος της επίστρωσης, καθότι για τις συνεχείς επιστρώσεις, χρησιμοποιείται η μεταφορά, μια διαδικασία που μπορεί να συνεισφέρει και στην κατανόηση της επαναληπτικότητας των μονάδων.

Επιπλέον, η μέθοδος αυτή δεν επιτρέπει κενά και επικαλύψεις. Οι μαθητές έχουν στη διάθεση τους και μπορούν να αναμείξουν διάφορες μονάδες. Η ύπαρξη κοινής μονάδας μέτρησης, ενδεχομένως, να προκύψει, ως αιτούμενο και, βαθμιαία, οι μαθητές, μπορεί να αντιληφθούν την αναγκαιότητά της. Μέσω της ελκυστικής, χρωματικής οπτικοποίησης μπορεί να κατανοηθεί ότι το θεμελιώδες, δομικό χαρακτηριστικό στη μέτρηση επιφανειών είναι τα ισάριθμα τετράγωνα-μονάδες, που συμπληρώνουν κάθε σειρά ή κάθε στήλη. Οι μαθητές παρωθούνται να μάθουν ότι το μήκος των πλευρών ενός ορθογωνίου μπορεί να καθορίσει τον αριθμό των μονάδων σε κάθε σειρά αλλά και το συνολικό αριθμό των σειρών.





Σχήμα 1. Πλακοστρώσεις αυλής

Ακόμα, οι μαθητές μπορεί να καταλάβουν ότι η μονάδα λειτουργεί ως παρονομαστής με την τιμή του κλάσματος να παριστάνει την τελική μέτρηση, να εντοπίσουν δηλαδή, ότι τα ποσά του μεγέθους μιας μονάδας και ο συνολικός αριθμός των μονάδων σε μια μέτρηση (το εμβαδόν) είναι αντιστρόφως ανάλογα. Η δυναμική τροποποίηση των μονάδων προσφέρει, αυτόματα, οποιαδήποτε στιγμή, τη σχετική, οπτική αλλά και μαθηματική επιβεβαίωση. Επίσης, παρέχονται ευκαιρίες εκτίμησης, κάθε φορά, του εμβαδού. Η επαλήθευση επιτυγχάνεται με την αυτόματη μέτρηση του εμβαδού της ορθογώνιας αυλής και της μονάδας και την διαίρεσή τους εν συνεχεία, με χρήση της εντολής «υπολογισμός».

Πιθανόν, μια τέτοια προσέγγιση να φέρει στο διδακτικό και μαθησιακό προσκήνιο την φαινομενική «παραδοξότητα», ως προς τη διαφοροποίηση των αριθμητικών δεδομένων μέτρησης του εμβαδού, του λογισμικού από τη μια, και των δεδομένων των μαθητών από την άλλη. Κάτι τέτοιο, που καταγράφεται ασφαλώς, ως σημαντική παιδαγωγική και μαθησιακή ωφελιμότητα, συμβαίνει, επειδή οι μονάδες μέτρησης του λογισμικού είναι οι καθιερωμένες (π.χ. cm^2). Επιπλέον, ένα άλλο παράπλευρο όφελος θα μπορούσε να ήταν η παραδοχή περί της αναγκαιότητας της εισαγωγής και κατανόησης των «συμφωνηθέντων» μεταξύ των ανθρώπινων κοινωνιών, επίσημων μονάδων μέτρησης. Βέβαια, οι μαθητές μπορούν να μετασχηματίσουν τη μονάδα-πλακίδιο, έτσι ώστε να ταυτιστεί αριθμητικά με την αντίστοιχη, που χρησιμοποιεί το λογισμικό, οπότε και τα αποτελέσματα θα συμπέσουν.

Ως μια εναλλακτική προσέγγιση οι μαθητές μπορούν, μέσω σχετικής εντολής του Cabri Geometry, να χρησιμοποιήσουν και το πλέγμα σαν ένα αποτελεσματικό εργαλείο μέτρησης. Επίσης, είναι δυνατό οι μαθητές μεγάλων τάξεων, ίσως Λυκείου, να συμμετάσχουν και οι ίδιοι στην κατασκευή της δραστηριότητας. Αυτή η διαδικασία που, όντως, στην προκειμένη περίπτωση της επίστρωσης της αυλής, παρουσιάζει σχετική δυσκολία κατά το σχεδιασμό, απαιτεί, σαφώς, αυξημένες γεωμετρικές και τεχνολογικές γνώσεις. Στον αντίποδα, όμως, μπορεί να λειτουργήσει αντισταθμιστικά, δεδομένου ότι τα διδακτικά και μαθησιακά οφέλη θα είναι, μάλλον, κατά πολύ πλουσιότερα.

Συζήτηση-Συμπεράσματα

Αρκετές επισκοπήσεις και έρευνες, στον ελλαδικό και διεθνή χώρο, έχουν επικεντρωθεί στις μετερχόμενες στρατηγικές, στις δυσκολίες και παρανοήσεις των μαθητών, ως προς την έννοια του εμβαδού και τη μέτρησή του, αλλά και στις επιπτώσεις τής χρήσης τεχνολογικών περιβαλλόντων στη διδασκαλία του. Έχουν αναφερθεί βέβαια, παρόμοιες δραστηριότητες οι οποίες συγκεράζουν και αξιοποιούν τα Δυναμικά Περιβάλλοντα και τη «Γεωμετρία της κίνησης», ως ένα δραστικό «μαθησιακό δικτυωτό», το οποίο μπορεί, ίσως, να προσφέρει το κατάλληλο «παιδαγωγικό ενδιαίτημα» για την άρση παρερμηνειών και παρανοήσεων, κατά τη μελέτη των εμβαδών και των μονάδων τους. Τρόπος, όμως, σχεδιασμού και αξιοποίησης του μετασχηματισμού της μεταφοράς, όπως στην παρούσα πρόταση, δεν έχει καταγραφεί.

Ακόμα, μέσω της παρούσας εργασίας, ως ενός τρόπου «μεταφοράς» της σχολικής γνώσης, ο μαθητής μπορεί να αντιληφθεί ότι η γνώση (και ειδικά η «μαθηματική») είναι χρήσιμη και ικανή να επιλύει προβλήματα στην καθημερινή ζωή. Επιπλέον, η χρωματικά πολυποίκιλη αυτή σύνθεση μπορεί να προσφέρει και παιδαγωγικό τόνο ιλαρότητας και ατμόσφαιρα μαθησιακής ευαρέσκειας, χαρακτηριστικά λίαν επιζητούμενα στο χλωμό, άγευστο, απρόσωπο και εξοντωτικό, σύγχρονο Σχολείο. Οι παραπάνω διαλαμβανόμενες δραστηριότητες προορίζονται για μαθητές Γυμνασίου, ενώ πρέπει να προτρέπεται και να ενθαρρύνεται η μελέτη τους και από μαθητές Δημοτικού. Τέλος και φυσικά, η ανατροφοδότηση, μέσω της ζώσας σχολικής, μαθησιακής πρακτικής, προβάλλει και καθίσταται λίαν απαραίτητη μονοδρομική αναγκαιότητα.

Αναφορές

Brieske, T. & Lott, J. (1978). The motion geometry of a finite plane. *The Two-Year College Mathematics Journal*, 9(5), 259-266.

Cavanagh, M. (2008). Area measurement in Year 7. *Reflections*, 33(1), 55-58.

Clements, D., & Stephan, M. (2004). Measurement in pre-k to grade 2 mathematics, in engaging young children in mathematics: standards for pre-school and kindergarten mathematics education. In H. Clements & J. Sarama & A.-M. DiBiase (eds.), *Engaging young children in mathematics: standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kelly, P. (1971). Topology and transformations in high school geometry. *Educational Studies in Mathematics*, 3, 477-481.

Kordaki, M., & Potari, D. (2002), The effect of tools of area measurement on students strategies: The case of a computer microworld. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(1), 65-100.

Reynolds, A., & Wheatley, G. (1996). Elementary students' construction and coordination of units in an area setting. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 564-581.

Smith, C. (1999). Using Cabri-Geometre to support undergraduate students' understanding of geometric concepts and types of reasoning. *Mathematics Education Review, 11*.

Zacharos, K. (2005). Students' measurement strategies of area. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 4(2), 111-127.

Κορδάκη, Μ. (1999). Δυναμικές αναπαραστάσεις της έννοιας της διατήρησης της επιφάνειας στο περιβάλλον ενός μικρόκοσμου και ο ρόλος τους στους μετασχηματισμούς που αναπτύχθηκαν από τους μαθητές. *Πρακτικά 4ου Πανελληνίου Συνεδρίου με διεθνή συμμετοχή "Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση"* (σ. 221-228). Ρέθυμνο.

Μαστρογιάννης, Α. (2008). Ευκλείδειοι μετασχηματισμοί, για την εύρεση εμβαδών επιπέδων σχημάτων, σε περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας. *Πρακτικά 5ου Πανελληνίου Συνεδρίου της ΕΕΕΠ-ΔΤΠΕ: «Τ.Π.Ε. & Εκπαίδευση»* (σ. 295-309). Πειραιάς.

Μαστρογιάννης, Α. & Αλπάς, Α. (2008). Απειροστικός λογισμός στο περιβάλλον του Cabri Geometry II. Μια διαχρονική προσέγγιση της εύρεσης του εμβαδού κύκλου. *Πρακτικά 1ου Πανελληνίου Εκπαιδευτικού Συνεδρίου Ημαθίας* (σ. 298-306). Νάουσα.